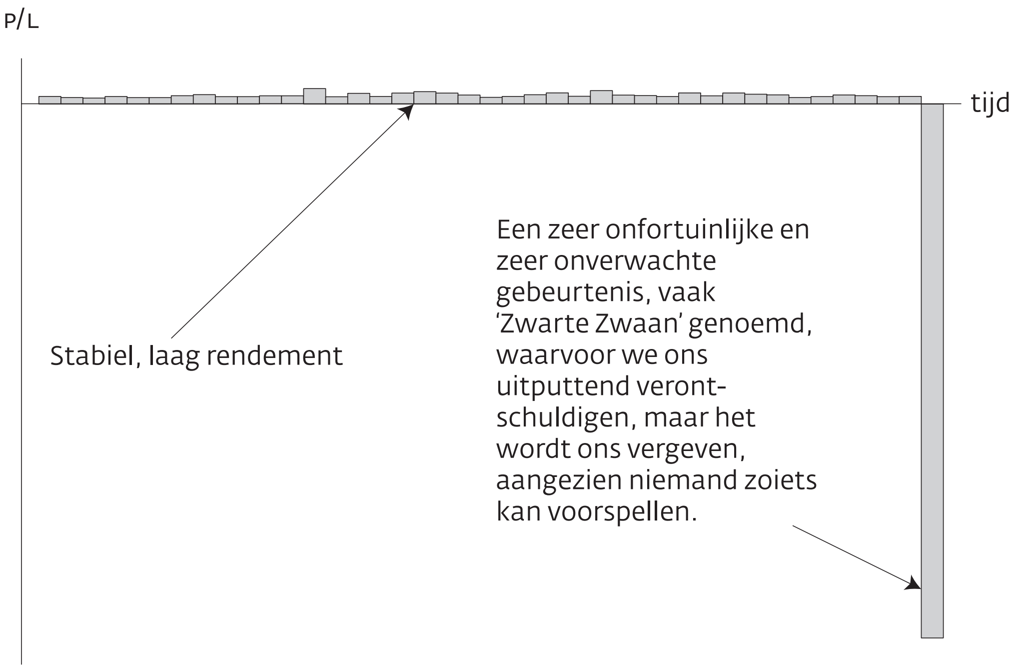
Technische bijlage

A. Skin in the game en staartrisico's



Figuur 7. *De Bob Rubin-handel. Resultaat in een asymmetrisch domein waar de voordelen zichtbaar zijn (en beloond worden met een zekere compensatie) en de nadelen zeldzaam (en onbestraft blijven vanwege afwezigheid van* skin in the game*). Kan gegeneraliseerd worden naar de politiek, naar alles waar beperkte sancties gelden.*

In dit deel analyseer ik de mogelijke discrepantie tussen staartrisico's en opbrengsten wanneer er sprake is van een principaal-agentprobleem.

Afschuiven van nadelige effecten: als een agent het voordeel heeft van het resultaat van de toevalsvariabele zonder dat hij risico loopt, en hij uitsluitend op basis van eerdere activiteiten wordt beoordeeld, bestaat de verleiding om risico's in de linker staart te verbergen met een negatief vertekende (of meer algemeen: asymmetrische) spreiding van resultaten. Dit geldt in zijn algemeenheid voor elk resultaat waarbij je niet ten volle de risico's en de negatieve gevolgen van je handelen draagt.

Stel, *P*(*K*, *M*) is het resultaat voor de operator over *M* stimuleringsperiodes:

$$\mathrm{P(K, M)} \equiv \gamma \sum_{i=1}^{M} q_{t+(i-1)\Delta t} \left(x^{j}_{i+t^{\Delta t}} - K \right)^{+} 1_{\Delta t(i-1)+t<\tau}$$

waarbij $X^{j} = (x^{j}_{t+1\Delta t})^{M}_{i=1} \in \mathbb{R}$, onafhankelijke en identiek verdeelde toevalsvariabelen zijn die staan voor de verdeling van de winsten over een bepaalde periode $[t, t+i\Delta t], i \in \mathbb{N}, \Delta t \in \mathbb{R}^{+}$ en K een 'horde' is, $\tau = \inf\left\{ s : \left(\sum_{z \leq s} x_z \right) < x_{\min} \right\}$ is een indicatie voor de stoptijd als aan de voorwaarden van eerdere activiteiten niet wordt voldaan (d.w.z. de voorwaarde dat er een zeker resultaat is behaald in een zeker aantal voorgaande jaren; anders eindigt de stroom uitbetalingen, is het spel afgelopen en stopt het aantal positieve prikkels). De constante $\gamma \in (0,1)$ is een 'winst voor de agent', compensatie voor prestaties, niet noodzakelijk in geld (zolang ze maar als 'voordeel' kan worden gekwantificeerd). De kwantiteit $q_{t+(i-1)\Delta t} \in [1, \infty]$ geeft de omvang van de blootstelling aan risico op bepaalde tijdstippen weer $t+(i-1)\Delta t$ (vanwege een 'Ito lag', aangezien het resultaat in periode *s* wordt bepaald door *q* in een strikt eerdere periode *s*).

Stel $\{f_j\}$ is de verzameling van kansmaten f_j van $X^j, j \in \mathbb{N}$. Elke maat komt overeen met bepaalde gemiddelde-/scheefheidskarakteristieken en we kunnen hun eigenschappen in tweeën splitsen aan beide zijden van een 'centraliteits'parameter *K*, als de 'bovenste' en 'onderste' verdelingen. We schrijven $dF_j(x)$ als $f_j(x)dx$, dus $F_j^{+} = \int_K^{\infty} f_j(x)dx$ en $F_j^{-} = \int_{-\infty}^{K} f_j(x)dx$, de 'bovenste' en 'onderste' verdeling, elk corresponderend met een bepaalde conditionele verwachting $\mathbb{E}_j^{+} \equiv \frac{\int_K^{\infty} x f_j(x)dx}{\int_K^{\infty} f_j(x)dx}$ en $\mathbb{E}_j^{-} \equiv \frac{\int_{-\infty}^{K} x f_j(x)dx}{\int_{-\infty}^{K} f_j(x)dx}$.

Definieer nu $v \in \mathbb{R}^{+}$ als een K-gecentreerde niet-parametrische maatstaf van asymmetrie, $v_j \equiv \frac{F_j^{-}}{F_j^{+}}$ met de waarde 1 voor positieve asymmetrie en 1 voor negatieve. Gevoelsmatig geeft scheefheid kansen en verwachtingen die in tegengestelde richting bewegen; hoe groter het negatieve resultaat, des te kleiner de kans op compensatie.

We gaan niet uit van een 'eerlijk spel', dat wil zeggen met ongelimiteerde winsten $m \in (-\infty, \infty)$, $F_j^{+}\,\mathbb{E}_j^{+} + F_j^{-}\,\mathbb{E}_j^{-} = m$ dat we kunnen schrijven als $m^{+} + m^{-} = m$.

Vereenvoudigde aannames van constante q en een enkelvoudig voorwaardelijke stoptijd

Stel q is constant, $q = 1$ en vereenvoudig de voorwaarde voor de stoptijd: in de voorgaande periodes is geen verlies geleden, $\tau = \inf\{(t+(i-1)\Delta t)) : x_{\Delta t(i-1)+t} < K\}$ wat de volgende uitkomst geeft:

$$\mathbb{E}(P(K,M) \equiv \gamma \mathbb{E}_j^+ \times \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{M} 1_{\Delta t(i-1)+t<\tau}\right)$$

Aangezien we uitgaan van onafhankelijke en gelijk verdeelde winsten voor de agent, komt de verwachting op de stoptijd overeen met de verwachting voor de stoptijd vermenigvuldigd met de verwachte compensatie voor de agent $\gamma \mathbb{E}_j^{+}$. En $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{M} 1_{\Delta t(i-1)+t<\tau}\right) = \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{M} 1_{\Delta t(i-1)+t<\tau}\right) \wedge M\right)$

De verwachting voor de stoptijd kan worden geschreven als de kans op succes op voorwaarde dat er geen eerder verlies is geleden:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{M} 1_{\Delta t(i-1)+t<\tau}\right) = \sum_{i=1}^{M} F_j^+ 1_{x_{\Delta t(i-1)+t<\tau} > K}$$

We kunnen de voorwaarde voor de stoptijd uitdrukken in termen van ononderbroken succesreeksen. Stel, Σ is de geordende verzameling van alle opeenvolgende succesruns $\Sigma \equiv \{\{F\}, \{SF\}, \{SSF\}, \ldots, \{(M-1)$ achtereenvolgend S, F$\}\}$, waarbij S voor succes staat en F voor mislukking over periode Δt, met de bijbehorende overeenkomende kansen $\{(1-F_j^+), F_j^+(1-F_j^+), F_j^{+2}(1-F_j^+), \ldots, F_j^{+M-1}(1-F_j^+)\}$,

$$\sum_{i=1}^{M} F_j^{+(i-1)}(1-F_j^+) = 1 - F_j^{+M} \simeq 1$$

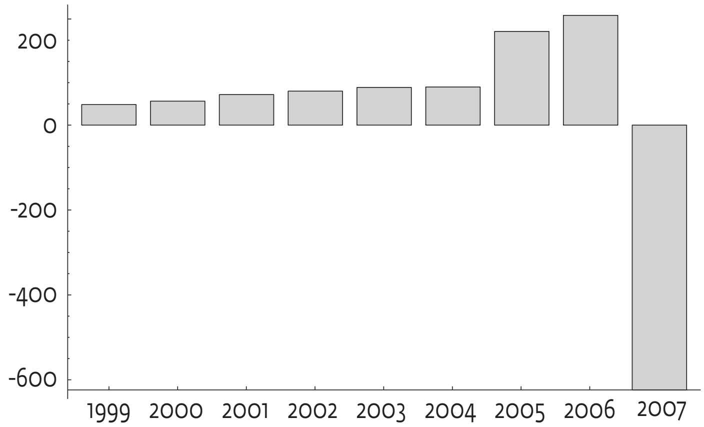
Voor de grote M kunnen we, aangezien $F_j^+ \in (0,1)$, het voorgaande vrijwel als een gelijkheid beschouwen, dus:

$$\sum_{i=1}^{M} 1_{t+(i-1)\Delta t<\tau} = \sum_{i=1}^{M} (i-1) F_j^{+(i-1)}(1-F_j^+) = \frac{F_j^+}{1-F_j^+}$$

Het verwachte rendement voor de agent wordt uiteindelijk:

$$\mathbb{E}(P(K,M)) = \gamma \mathbb{E}_j^+ \frac{F_j^+}{1-F_j^+}$$

wat toeneemt als (i) $\mathbb{E}_j^+$ toeneemt, en (ii) de kans op het verlies F_j^- zo klein mogelijk te maken, maar, en dat is het kernpunt, zelfs als (i) en (ii) zich voordoen ten koste van m, de totaal te verwachten opbrengst van het hele plaatje.



Figuur 8. *Indy Mac, een bedrijf dat failliet ging tijdens de hypotheekcrisis (uit Taleb, 2009). Het is representatief voor de risico's die blijven toenemen als er geen verliezen optreden, tot de zaak klapt.*

Het is alarmerend dat de agent, doordat $\mathbb{E}_j^+ = \frac{m-m^-}{F_j^+}$, zich niet druk maakt over een vermindering van het totale verwachte rendement m, als dat van de linkerkant van de verdeling, m^- komt. Binnen een scheve ruimte maximaliseert het rendement voor de agent bij de verdeling j met een laagste waarde van v_j (maximale negatieve asymmetrie). De verwachting van het eindbedrag bij positieve stimulus zonder skin in the game hangt af van negatieve scheefheid, niet van m.

B. PROBABILISTISCHE DUURZAAMHEID EN ERGODICITEIT

Dynamisch risico: Als je herhaaldelijk het risico – welk risico dan ook – neemt, moet je het uitdrukken in termen van blootstelling per levensduur, of van de manier waarop het de overblijvende levensduur verkort.

Eigenschappen van ondergang: Kansen op ondergang gelden in het tijdsdomein voor één enkele agent en komen niet overeen met de toestandsruimte- of (ensemble-)staartkansen. Evenmin zijn verwachtingen inwisselbaar tussen de twee domeinen. Uitspraken dat agenten staartgebeurenissen (die tot ondergang leiden) die zijn afgeleid van toestandsruimteschattingen overschatten, zijn daardoor ook incorrect. Veel theorieën over de 'rationaliteit' van agenten zijn gebaseerd op een verkeerde schattingsoperatoren en/of kansmaten.

Dit is het belangrijkste argument voor de halterstrategie.

Dit is een speciaal geval van de verwevenheid tussen een toevalsvariabele en het resultaat van een tijdsafhankelijke, padafhankelijke afgeleide functie.

Een minder technische vertaling:

*Steek nooit een rivier over van gemiddeld een meter diep.**

Een vereenvoudigde algemene casus

Laten we uitgaan van een extreem vereenvoudigd voorbeeld: de rij van onafhankelijke toevalsvariabelen $(X_i)_{i=1}^n = (X_1, X_2, \dots X_n)$ in het domein van de positieve reële getallen $(\mathbb{R}^+)$. De convergentiestellingen van de klassieke kansrekening verwijst naar het gedrag van het totaal of het gemiddelde: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_i^n X_i = m$ blijkens de (zwakke) wet van de grote aantallen (convergentie in waarschijnlijkheid). Zoals is aangetoond in het verhaal over het casino in hoofdstuk 19 levert n, wanneer deze tot in het oneindige doorloopt, convergentie in waarschijnlijkheid naar de werkelijke gemiddelde opbrengst m. Hoewel de wet van de grote aantallen geldt voor trekkingen die strikt gescheiden zijn in de tijd, veronderstelt het (enige) onafhankelijkheid en in elk geval padonafhankelijkheid.

Ga nu uit van $(X_{i,t})_{t=1}^T = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots X_{i,T})$, waarbij elke statische variabele X_i wordt geïndexeerd door een tijdseenheid $t : 0 < t < T$. Stel dat de 'tijdsgebeurtenissen' ontleend zijn aan precies dezelfde kansverdeling: $P(X_i) = P(X_{i,t})$.

We definiëren een tijdswaarschijnlijkheid als de ontwikkeling in tijd voor één enkele agent i.

Als er sprake is van een terminaal, dat wil zeggen onherroepelijke ondergang, hangt elke waarneming nu af van een of ander kenmerk van de voorafgaande, en wat er gebeurt in periode t hangt af van $t-1$, wat er gebeurt op $t-1$ van $t-2$, enz. Er is nu sprake van padafhankelijkheid.

Hierna volgt wat we het falen van ergodiciteit noemen:

Stelling 1 (toestandsruimte-ongelijkheid): Stel dat $\forall t,\ P(X_t = 0) > 0$ *en* $X_0 > 0$, $\mathbb{E}_N(X_t) < \infty$, de toestandsruimte-verwachting is voor een statische beginperiode t, en $\mathbb{E}_T(X_i)$ de tijdsverwachting voor een willekeurige agent i, beide verkregen via de zwakke wet van de grote aantallen. We hebben

$$\mathbb{E}_N(X_t) \geq \mathbb{E}_T(X_i)$$

Bewijs:

$$\forall t, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_i^n \mathbb{1}_{X_{i,t-1}>0} X_{i,t} = m\left(1 - \frac{1}{n}\sum_i^n \mathbb{1}_{X_{i,t-1}\leq 0}\right).$$

Waarbij $\mathbb{1}_{X_{t-1}>0}$ de indicatorfunctie is waarvoor overleven in de voorgaande periode vereist is. Zodoende vertonen de beperkingen van n voor t een afnemende verwachting in tijd: $\mathbb{E}_N(X_{t-1}) \leq \mathbb{E}_N(X_t)$.

* Discussie tussen mij en P. Jorion, 1997, en Taleb 2007.

We kunnen divergentie nu daadwerkelijk bewijzen.

$$\forall i, \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t}^{T} \mathbb{1}_{X_{i,t-1}>0} X_{i,t} = 0 .$$

Zoals we zien door $T < \infty$, krijgen we de ongelijkheid voor alle T door de wet van herhaalde verwachting recursief te hanteren.

We zien dat het ensemble van risiconemers een rendement $m(1-\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} \mathbb{1}_{X_{i,t-1}=0})$ verwacht in *elke* periode t, terwijl *elke afzonderlijke* risiconemer uiteindelijk gegarandeerd bankroet gaat.

Andere benaderingen: we kunnen het bewijs ook formeler benaderen, op een maat-theoretische manier, door aan te tonen dat terwijl verzamelingruimtes zonder ondergang $\mathcal{A}$ disjunct zijn, dit niet geldt voor tijdsverzamelingen. De benadering berust op het feit dat voor maat v

$$\left(\bigcup_{T} \mathcal{A}_t \bigcap_{\leq t} \mathcal{A}_i^c\right) \text{ niet noodzakelijkerwijs gelijk is aan } v\left(\bigcup_{T} \mathcal{A}_t\right)$$

Bijna alle artikelen over de actuariële 'overschatting' van staartrisico's via opties (zie bespreking in Barberis, 2003) zijn ongeldig blijkens de ongelijkheid in Theorema 1. Ze gaan er duidelijk van uit dat een agent slechts gedurende één enkele beslissing of blootstelling bestaat. In de oorspronkelijke artikelen die de 'vertekening' documenteren, wordt er simpelweg van uitgegaan dat de agenten in de rest van hun leven nooit meer een beslissing zullen nemen.

De gebruikelijke oplossing voor deze padafhankelijkheid – als die alleen van ondergang afhangt – is een functie van X te introduceren om het ensemblegemiddelde (padonafhankelijk) dezelfde eigenschappen toe te kennen als het tijdsgemiddelde (padafhankelijk) – of gemiddelde op voorwaarde van overleving. Het natuurlijke logaritme lijkt een goede kandidaat. Vandaar dat $S_n = \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$ en $S_T = \sum_{t=1}^{T} \log(X_t)$ tot dezelfde waarschijnlijkheidscategorie behoren; vandaar dat een waarschijnlijkheidsmaat bij de ene niet wordt beïnvloed door de andere – wat ergodiciteit wordt genoemd. In die zin is het, wanneer men activiteiten en risico's analyseert, onder omstandigheden van mogelijke ondergang, noodzakelijk om een logaritmische transformatie van de variabele te hanteren (Peters, 2011) of begrensdheid van de linkerstaart (Kelly, 1956), en tegelijkertijd de kans in de rechterstaart te maximaliseren (Gell-Mann, 2016), of begrensdheid van de linkerstaart (German et al., 2015).

Wat we hier hebben aangetoond is dat, tenzij je een logaritmische transformatie hanteert (of een gelijksoortige – continue – functie die $-\infty$ produceert waarbij ondergang op $X = 0$ wordt gesteld), de beide verwachtingen uiteen gaan lopen. Het hele punt van het voorzorgsbeginsel is dat je zorgt dat je door de kans op ondergang te verkleinen, voorkomt dat je je op logaritmen of transformaties moet baseren.

In hun magistrale artikel toonden Peters en Gell-Mann (2014) aan dat Bernoulli het logaritme niet gebruikte voor een concave 'nutsfunctie', maar, zoals bij het Kelly-criterium, om de ergodiciteit te herstellen. Een beetje geschiedenis:

- Bernoulli ontdekt logaritmisch risico vanuit de illusie van 'praktisch nut'.
- Kelly en Thorp herstelden het logaritme voor het maximale-groeicriterium als optimale gokstrategie. Heeft niets te maken met praktisch nut.
- Samuelson verwerpt het logaritme als agressief, maar beseft niet dat semi-logaritme (of deellogaritme), d.w.z. van een deel van het vermogen, mogelijk is. Van Menger tot Arrow, via Chernoff en Samuelson maken velen die zich met de besluitvormingstheorie bezighouden aantoonbaar de fout van de ergodiciteit.
- Pitman toont in 1975 aan dat een brownse beweging die is onderworpen aan een absorberende barrière bij 0, met gecensureerde absorberende paden, een driedimensionaal Bessel-proces wordt. De afwijking van de resterende paden is $\frac{1}{x}$, wat integreert tot een logaritme.
- Peters en Gell-Mann herstellen het logaritme voor ergodiciteit en geven bovendien het Kelly-Thorpe-resultaat een stevig fysiek fundament.
- Samen met Cirillo ontdekte ik (Taleb & Cirillo, 2015) de log als een unieke continue transformatie waarmee een duale verdeling wordt gecreëerd om enkelstaartige compacte ondersteuning te elimineren waardoor het gebruik van een extreme-waardetheorie mogelijk wordt.
- We (Briys en Taleb, in voorbereiding en in privécommunicatie) kunnen de noodzaak aantonen van logaritmische transformatie als eenvoudige vorm van ondergangsvermijding, wat weer een speciaal geval is van HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion).

Aanpassing van Stelling 1 aan de brownse beweging

De implicaties van een versimpelde bespreking veranderen niet, ook niet als je rijkere modellen gebruikt, zoals een compleet stochastisch proces onderworpen aan een absorberende barrière. En natuurlijk kan in een natuurlijke omgeving de uitroeiing van al het bestaande leven optreden (d.w.z., X_t kan een extreem negatieve waarde krijgen), niet alleen een stopvoorwaarde. Het betoog van Peters en Gell-Mann maakt ook korte metten met de zogenoemde *equity premium puzzle* als je ook rekening houdt met dikke staarten (vandaar ook veel heftiger uitkomsten, tot een niveau dat gelijkstaat aan ondergang) en het niet inwisselbaar zijn van tijd en ensemble. Het is geen puzzel.

Het probleem is niet anders in het echte leven als je gebruikmaakt van een stochastisch proces volgens de brownse beweging, onderworpen aan een absorberende barrière. In plaats van de vereenvoudigde weergave zouden we, voor een proces onderworpen aan L, een absorberende barrière hebben van onderaf, in de rekenkundige versie:

$$\forall i,\ X_{i,t} = \begin{cases} X_{i,t-1} + Z_{i,t}, & X_{i,t-1} > L \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Of, voor een geometrisch proces:

$$\forall i,\ X_{i,t} = \begin{cases} X_{i,t-1}(1+Z_{i,t}) \approx X_{i,t-1}e^{Z_{i,t}}, & X_{i,t-1} > L \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

waarin Z een toevalsvariabele is.

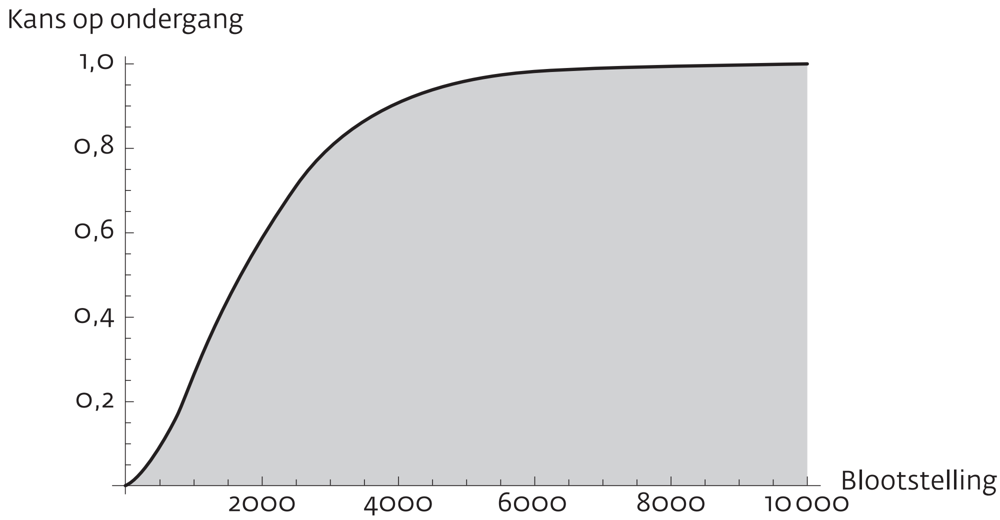
Bij ononderbroken tijd, en uitgaande van het geometrische geval, laat $\tau=\{\inf\ t: X_{i,t} > L\}$ de stoptijd zijn. Het idee is dat je de eenvoudige verwachting van de stoptijd laat overeenkomen met de resterende levensduur – of in dezelfde volgorde laat blijven.

We hebben de focus verplaatst van waarschijnlijkheid naar de discrepantie tussen stoptijd τ voor ondergang en de resterende tijdsduur.

C. Principe van probabilistische duurzaamheid

Principe: *een individu moet elk risico nemen alsof hij dat herhaaldelijk neemt – in een vastgestelde regelmaat – gedurende zijn resterende levensduur.*

Het principe van duurzaamheid is nodig voor het volgende betoog. Experimenten zijn statisch (we zagen de verwarring tussen de toestandsruimte en de tijd), terwijl het leven continu is. Als je een kleine kans op ondergang loopt als een 'eenmalig' risico, dat overleeft en het dan nog eens doet (nog zo'n 'eenmalig' geval), is er uiteindelijk een kans van 1 dat je ten onder gaat. Er ontstaat verwarring doordat een 'eenmalig' risico redelijk lijkt, maar dat zou betekenen dat nóg zo'n risico ook redelijk is (zie figuur 9). Het goede nieuws is dat sommige risicocategorieën een kans van praktisch nul kunnen hebben: de aarde heeft drie miljard jaar lang dagelijks triljoenen natuurlijke variaties overleefd, anders waren we er niet. We kunnen argumenten van conditionele kansen gebruiken (aangepast voor de overlevingsfout) om de kans op ondergang in een systeem te bepalen.



Figuur 9. *Waarom ondergang geen hernieuwbare bron is. Hoe klein de kans ook is, iets wat voorbestemd is de ondergangsbarrière te raken, zal die gegarandeerd ook raken. Geen enkel risico moet als een 'eenmalige' gebeurtenis worden beschouwd.*

We hoeven niet uit te gaan van $t \to \infty$, en permanente duurzaamheid is ook geen noodzaak. We kunnen gewoon de levensduur verlengen. Hoe langer de t, des te meer de verwachtingsoperatoren uiteenlopen.

Beschouw de onvoorwaardelijke stoptijd voor ondergang in een discreet en vereenvoudigd model; $\mathbb{E}(\tau \wedge T) \approx \mathbb{E}(\tau) = \sum_{i=1}^{\lambda N} i\left(\frac{p}{\lambda}(1-\frac{p}{\lambda})^{i-1}\right)$, waarin λ het aantal blootstellingen aan risico per tijdsperiode is, T de totale resterende tijdsduur en p de kans op ondergang, beide over diezelfde tijdsperiode om p vast te stellen. Aangezien $\mathbb{E}(\tau) = \frac{\lambda}{p}$, kunnen we bij herhaling het risico kalibreren. Hoe langer de levensverwachting T (uitgedrukt in tijdsperioden), des te ernstiger het ondergangsprobleem. Mensen en planten hebben een korte levensduur, de natuur niet – althans voor t van de orde van 10^8 jaren –, vandaar een jaarlijkse kans op ondergang van $O(10^{-8})$ en (voor geringere toenames) plaatselijke kansen op ondergang van hoogstens $O(10^{-50})$. Hoe hoger in de hiërarchie van het individu-soortsysteem, des te ernstiger het ondergangsprobleem. Deze dualiteit hangt af van $t \to \infty$; vandaar dat het geen noodzakelijk vereiste is voor voorwerpen die niet permanent zijn, die een beperkte levensduur hebben.

> **Het dikkestaartenargument**: hoe beter een systeem in staat is grote afwijkingen te genereren, des te ernstiger het ondergangsprobleem.

We zullen het probleem van de dikke staarten uitgebreider behandelen. De variantie van het proces is duidelijk van belang; maar zolang afwijkingen de ondergangsdrempel niet overschrijden, doen ze er niet toe.

Logaritmische transformatie

Onder het axioma van duurzaamheid, d.w.z. dat 'je risico's moet nemen alsof je daar altijd mee door zou gaan', is alleen een logaritmische (of vergelijkbare) transformatie van toepassing.

Een dikke staart is een eigenschap die vooral zorgwekkend is bij het ontbreken van een compact domein voor de toevalsvariabele, en minder zorgwekkend wanneer de variabelen begrensd zijn. Maar omdat we hebben gezien dat het gebruik van een logaritmische variabele noodzakelijk is, heeft een toevalsvariabele in het domein $[0, \infty)$ nu het domein in $(-\infty, \infty)$, vandaar dat eigenschappen ontleend aan de extreme waarde nu van toepassing zijn op onze analyse. En als verlies wordt gedefinieerd als een positief getal met een bovengrens H die correspondeert met ondergang, dan wordt het mogelijk om het van $[0, H]$ naar $[0, \infty)$ te transformeren.

Cramér en Lundberg ontdekten bij verzekeringsanalyse het probleem; zie Cramér (1930).

> **Een opmerking over ergodiciteit*:** Ergodiciteit is niet statistisch herkenbaar en niet observeerbaar, en er is geen test voor tijdseries die ergodiciteit geeft, vergelijkbaar met de Dickey-Fuller-test voor stationariteit (of de Phillips-Perron-test voor orde van integratie). Nog crucialer:
>
> Als je resultaat is verkregen door observatie van een tijdserie, hoe kun je dan beweringen doen over de kansmaat voor het ensemble?

Het antwoord is vergelijkbaar met arbitrage, waar geen statistische test voor is, maar die – dit is cruciaal – een ex ante vastgestelde kansmaat heeft (het 'geen gratis lunch' argument). Beschouw daarnaast het argument van een 'zelffinancierende' strategie, bijvoorbeeld via een dynamische hedgingstrategie. Bij de limiet gaan we ervan uit dat de wet van de grote aantallen de rendementen comprimeert en dat er nooit verlies of absorberende barrières wordt bereikt. Het voldoet aan ons criterium van ergodiciteit, maar heeft geen statistisch verkregen maat. Daarnaast is het in vrijwel alle literatuur over investeringen/consumptie in de tijd een voorwaarde dat er geen kans op ondergang bestaat.

We beweren niet dat een bepaald effect of willekeurig proces ergodisch is, maar dat, gezien de ensemblewaarschijnlijkheid (verkregen door dwarsdoorsnedemethoden, verondersteld via subjectieve kansen, of simpelweg vastgesteld door arbitrageargumenten), een strategie waarbij risico's worden genomen zich aan zulke eigenschappen moet *conformeren*. Ergodiciteit betreft dus

* Dankzij kritische vragen van Andrew Lesniewski, die hielp definiëren wat we met ergodiciteit bedoelen, aangezien de betekenis hier anders is dan die in de statistische natuurkunde.

de functie van de toevalsvariabele of het proces, niet het proces zelf. En de functie moet geen ondergang toestaan.

Met andere woorden: *ervan uitgaande* dat de SP500 een bepaald verwacht rendement 'alfa' heeft, moet een ergodische strategie een strategie opleveren, bijvoorbeeld het Kelly-criterium, om de veronderstelde alfa te pakken te krijgen. Als dat niet gebeurt, vanwege een absorberende barrière of iets anders, is de strategie niet ergodisch.

D. TECHNISCHE DEFINITIE VAN DIKKE STAARTEN

Kansverdelingen variëren tussen extreem dunne (Bernoulli) en extreem dikke staarten. Onder de categorieën van verdelingen die vaak worden onderscheiden vanwege de convergerende eigenschappen van momenten zijn: (1) een domein hebbend dat compact is maar niet gedegenereerd, (2) subgaussiaans, (3) gaussiaans, (4) subexponentieel, (5) machtsfunctie met exponent groter dan 3, (6) machtsfunctie met exponent kleiner dan of gelijk aan 3 en groter dan 2, (7) machtsfunctie met exponent kleiner of gelijk aan 2. Machtsfunctieverdelingen hebben alleen een eindig gemiddelde als de exponent groter is dan 1, en alleen een eindige variantie als de exponent groter is dan 2.

Onze belangstelling gaat uit naar het onderscheid tussen gevallen waarin staartgebeurtenissen de impacts domineren, als formele definitie van de grens tussen de categorieën van verdelingen die als Mediocristan en Extremistan worden beschouwd. De natuurlijke grens daartussen doet zich voor in de subexponentiële categorie, die de volgende eigenschap heeft:

Stel, $\mathbf{X} = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ is een opeenvolging van onafhankelijke en identiek verdeelde variabelen met domein ($\mathbb{R}^+$), met een cumulatieve verdelingsfunctie F. De subexponentiële categorie van verdelingen wordt gedefinieerd door (zie Teugels, 1975; Pitman, 1980):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2$$

Waarbij $F^{*2} = F' * F$ de cumulatieve verdeling is van $X1 + X2$, de som van twee onafhankelijke kopieën van X. Dit betekent dat de kans dat de som $X_1 + X_2$, hoger is dan een waarde x tweemaal de kans is dat elk ervan afzonderlijk hoger is dan x. Dus elke keer dat de som hoger is dan x, voor waarden van x die hoog genoeg zijn, komt de waarde van de som voort uit het feit dat de ene of de andere hoger is dan x – het maximum over de twee variabelen – en dat de bijdrage van de andere verwaarloosbaar is.

Meer in het algemeen kan worden aangetoond dat de som van n variabelen op dezelfde manier wordt gedomineerd door het maximum van de waarden over die variabelen. Formeel zijn de volgende twee eigenschappen equivalent aan de subexponentiële toestand (Chistyakov, 1964; Embrechts et al., 1979). Voor een gegeven $n \geq 2$, stel dat $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ en $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$

$$\text{a) } \lim_{x \to \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(X > x)} = n$$

$$\text{b) } \lim_{x \to \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1$$

De som *Sn* heeft dus dezelfde grootte als het grootste voorbeeld M_n, wat een andere manier is om te zeggen dat de staarten de belangrijkste rol spelen.

Intuïtief zouden subexponentiële staartgebeurtenissen langzamer moeten afnemen dan een exponentiële verdeling waarvoor grote staartgebeurtenissen irrelevant zouden moeten zijn. En men kan ook daadwerkelijk aantonen dat subexponentiële verdelingen geen exponentiële momenten hebben:

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} dF(x) = +\infty$$

voor alle waarden van ε groter dan nul. Het omgekeerde geldt echter niet: verdelingen kunnen geen exponentiële momenten hebben, maar voldoen toch niet aan de subexponentiële toestand.

We merken op dat als we besluiten afwijkingen aan te duiden als negatieve waarden van de variabele x, door symmetrie hetzelfde resultaat geldt voor extreem negatieve waarden, waarbij $x \to +\infty$ wordt vervangen door $x \to -\infty$. Voor variabelen met twee staarten kunnen we positieve en negatieve domeinen afzonderlijk beschouwen.